1. Considere la función
$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1,1].$$
Note que la curva $y = f(x)$ forma un semicírculo de radio 1.
   (a) Calcule el valor de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.
   (b) Use la regla del trapecio en el intervalo $[-1,1]$ para aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.
   (c) Use la regla del trapecio en el intervalo $[-1,0]$ y luego en el intervalo $[0,1]$ para aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.
   (d) Use la regla de Simpson en el intervalo $[-1,1]$ para aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

   En cada caso use la regla simple y no la compuesta. Calcule el error y explique sus resultados.

2. Utilice las reglas compuestas del punto medio, trapecio y Simpson con $m = 1, 2$ y 4 para aproximar el valor de las siguientes integrales
$$\text{(a)} \int_0^1 x^2 dx \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi/2} \cos x \; dx \qquad \text{(c)} \int_0^1 e^x dx \qquad \text{(d)} \int_0^1 x e^x dx$$
$$\text{(e)} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{(f)} \int_0^{\pi} x \cos x \; dx \qquad \text{(g)} \int_{-1}^{1} |x| e^x dx$$

3. Aplique la regla de Simpson para aproximar
$$\int_0^1 x^4 dx$$
y demuestre que el error de aproximación es igual al error que predice la fórmula.

4. Encuentre c_1, c_2 y c_3 tal que
$$\int_0^1 f(x)dx \approx c_1 f(0) + c_2 f(0.5) + c_3 f(1)$$
tenga grado de precisión mayor que uno (esto es, que el exponente de la h en el error sea mayor que uno). Use $f(x) = 1, x,$ y x^2 para hallar los valores de las c.

5. Desarrolle un método compuesto para el método de integración numérica
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(2f(a+h/4) - f(a+h/2) + 2f(a+3h/4)\right) + \frac{7h^5}{23040} f^{(4)}(\xi),$$
donde $h = b - a$. Incluya el término del error.

6. Encuentre el termino del error del método de integración numérica de Boole

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{90}\left(7f(a) + 32f(a+h/4) + 12f(a+h/2) + 32f(a+3h/4) + 7f(b)\right),$$

donde $h = b - a$.

7. Encuentre el número m de subintervalos necesarios para que el método de Simpson compuesto aproxime a

$$\int_0^1 e^x dx$$

con cuatro lugares decimales correctos.