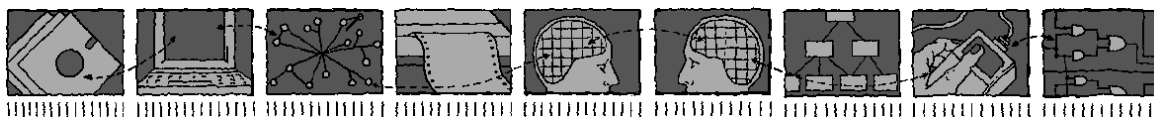


Department of Mathematics
University of Puerto Rico



**Estudio de biyecciones y recurrencias para
particiones enteras en un número acotado de
partes**

Héctor D. Torres Aponte

April 2012

Department of Mathematics
University of Puerto Rico

**Estudio de biyecciones y recurrencias para
particiones enteras en un número acotado de
partes**

Héctor D. Torres Aponte

Graduate Student
Department of Mathematics
University of Puerto Rico
Río Piedras, Puerto Rico
Email: hectordavidtorres@gmail.com

April 2012

Índice

Resumen	1
1. Introducción	1
1.1. Teoría elemental de Particiones	1
1.2. Funciones Generadoras de Productos Infinitos en Una Variable	3
1.3. Representación Gráfica de Particiones	5
2. Biyecciones y recurrencias para particiones enteras.	8
2.1. Particiones en tres partes	10
3. Bibliografía	13

Resumen

En este escrito se estudiará la teoría básica de Particiones de números enteros. Algunos de los temas a estudiar serán los teoremas básicos de funciones generadoras de particiones, propiedades entre conjunto de particiones y métodos gráficos para representar las particiones de enteros. Además se estudiarán las biyecciones y recurrencias de particiones enteras en un número acotado de partes[BBS09].

1. Introducción

1.1. Teoría elemental de Particiones

En esta sección se estarán discutiendo las definiciones y los teoremas más importantes para la introducción a la teoría de particiones. Esta sección está basada en algunos textos muy importantes en el área de teoría de particiones[And98],[HW60].

Definición 1.1. Una partición de un número entero positivo n es una sucesión finita no-creciente de números enteros positivos h_1, h_2, \dots, h_s tal que $\sum_{i=1}^s h_i = n$. Los h_i se le conocen como partes de la partición, talque $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \dots \geq h_s$.

Estaremos denotando la partición (h_1, h_2, \dots, h_s) como π y escribiremos $\pi \vdash n$ para denotar " π es una partición de n ". En algunas ocasiones es útil usar una notación que indique explícitamente el número de veces que un entero en particular aparece en la partición. Si $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_s) \vdash n$, lo podemos escribir como

$$h = \left(h_1^{f_1} h_2^{f_2} h_3^{f_3} \dots h_s^{f_s} \right)$$

donde exactamente f_i de h_j es igual a i . Note que $\sum_{i \geq 1} f_i h_i = n$

Definición 1.2. La función de Partición $p(n)$ es el número de particiones de n

Observación 1.1. $p(n) = 0$ cuando n es negativo. Además vamos a fijar $p(0) = 1$, esto con la observación de que la única sucesión que forma una partición para 0 es una sucesión vacía.

Ejemplo 1.2.

$$p(1) = 1 \quad : \quad 1 = (1)$$

$$p(2) = 2 \quad : \quad 2 = (2), 1 + 1 = (1^2)$$

$$p(3) = 3 \quad : \quad 3 = (3), 2 + 1 = (21), 1 + 1 + 1 = (1^3)$$

$$p(4) = 5 \quad : \quad 4 = (4), 3 + 1 = (31), 2 + 2 = (2^2), 2 + 1 + 1 = (21^2), 1 + 1 + 1 + 1 = (1^4)$$

Note que la función de partición $p(n)$ crece de manera rápida. Por Ejemplo $p(10) = 42$, $p(20) = 627$, $p(50) = 204226$, $p(100) = 190569292$.

Existen maneras computacionales de como generar y calcular el número de particiones de números enteros. Se estuvo trabajando con el programa *Wolfram Mathematica 6.0.0* el cual tiene varios comandos ya pre-establecidos para el cálculo de de particiones. Por ejemplo el código

```
IntegerPartitions[8]
```

produce todas las particiones del número entero 8. Si utilizamos el comando

```
PartitionsP[8]
```

produce el número de particiones para el número entero 8. A continuación se estará mostrando una lista con los distintos número de particiones para $n = 0$ hasta $n = 100$.

```
In 1: Table[PartitionsP[k], {k, 0, 100}]
```

```
Out 1: {1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, \
297, 385, 490, 627, 792, 1002, 1255, 1575, 1958, 2436, 3010, 3718, \
4565, 5604, 6842, 8349, 10143, 12310, 14883, 17977, 21637, 26015, \
31185, 37338, 44583, 53174, 63261, 75175, 89134, 105558, 124754, \
147273, 173525, 204226, 239943, 281589, 329931, 386155, 451276, \
526823, 614154, 715220, 831820, 966467, 1121505, 1300156, 1505499, \
1741630, 2012558, 2323520, 2679689, 3087735, 3554345, 4087968, \
4697205, 5392783, 6185689, 7089500, 8118264, 9289091, 10619863, \
12132164, 13848650, 15796476, 18004327, 20506255, 23338469, 26543660, \
30167357, 34262962, 38887673, 44108109, 49995925, 56634173, 64112359, \
72533807, 82010177, 92669720, 104651419, 118114304, 133230930, \
150198136, 169229875, 190569292}
```

Ahora se construirá una gráfica para ver el crecimiento de los números de particiones no acotadas.

```
ListLinePlot[Table[Log[10, PartitionsP[k]], {k, 100}]]
```

lo cual genera

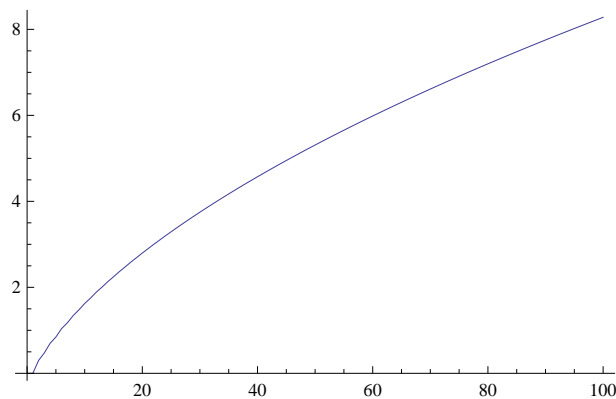


Fig 1: Crecimiento del número de partes no acotadas para $n = 0, \dots, 100$

Vemos que en el comando de esta gráfica se está utilizando la función logarítmica, ya que esta está bien definida en los números positivos y nos sirve para reducir el campo de valores en nuestra gráfica.

Definición 1.3. Sea \mathcal{S} el conjunto de todas las particiones.

Definición 1.4. Sea $p(\mathcal{S}, n)$ el número de particiones de n que pertenecen a un subconjunto \mathcal{S} del conjunto \mathcal{S} de todas las particiones.

Ejemplo 1.3. Sea \mathcal{O} el conjunto de todas las particiones con partes impares. Sea \mathcal{D} el conjunto de todas las particiones con partes distintas. Entonces

$$p(\mathcal{O}, 1) = 1$$

$$p(\mathcal{O}, 3) = 2 : 3 = (3), 1 + 1 + 1 = (1^3)$$

$$p(\mathcal{O}, 5) = 3 : 5 = (5), 3 + 1 + 1 = (3, 2^1)$$

$$p(\mathcal{D}, 1) = 1 : 1 = (1)$$

$$p(\mathcal{D}, 3) = 2 : 3 = (3), 2 + 1 = (2, 1)$$

$$p(\mathcal{D}, 6) = 4 : 6 = (6), 5 + 1 = (5, 1), 4 + 2 = (4, 2), 3 + 2 + 1 = (3, 2, 1)$$

1.2. Funciones Generadoras de Productos Infinitos en Una Variable

Definición 1.5. La función generadora $f(q)$ para la sucesión a_0, a_1, a_2, \dots es la serie potencia $f(q) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$

Definición 1.6. Sea H el conjunto de los enteros positivos. Sea " H " el conjunto de todas las particiones cuyas partes están en H . Tenemos que $p("H", n)$ es el número de particiones de n que tiene todas sus partes en H .

Si H_0 es el conjunto de todas las particiones impares, entonces " H_0 " = \mathcal{O} .

Definición 1.7. Sea H el conjunto de números enteros positivos. Sea " H " ($\leq d$) el conjunto de todas las particiones en las cuales ninguna parte no aparece más de d veces y cada parte está en H .

Teorema 1.4. Sea H un conjunto de enteros positivos, y sea

$$f(q) = \sum_{n \geq 0} p("H", n) q^n \quad (1)$$

$$f_d(q) = \sum_{n \geq 0} p("H" (\leq d), n) q^n \quad (2)$$

entonces para $|q| < 1$

$$f(q) = \prod_{h \in H} (1 - q^h)^{-1} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f_d(q) &= \prod_{h \in H} (1 + q^h + \dots + q^{dh}) \\ &= \prod_{h \in H} (1 - q^{(d+1)h}) (1 - q^h)^{-1} \end{aligned}$$

Observación 1.5. La equivalencia entre las dos expresiones de $f_d(q)$ es obtenido de una fórmula para la suma de series geométricas finitas:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^r = \frac{1 - x^{r+1}}{1 - x}$$

Demostración. Queremos probar que $\sum_{n \geq 0} P({}^n H^n, n) q^n = \prod_{h \in H} (1 - q^n)^{-1}$. Sea $H = \{h_1, h_2, \dots\}$, entonces

$$\begin{aligned} \prod_{h \in H} (1 - q^h)^{-1} &= \prod_{h \in H} \frac{1}{1 - q^h} \\ &= \prod_{h \in H} (1 + q^h + q^{2h} + q^{3h} + \dots) \\ &= (1 + q^{h_1} + q^{2h_1} + \dots) \times (1 + q^{h_2} + q^{2h_2} + \dots) \times \dots \quad \left(= \prod_{h \in H} \sum_{n \geq 0} q^{hn} \right) \\ &\vdots \\ &= \sum_{a_1 \geq 0} \sum_{a_2 \geq 0} \sum_{a_3 \geq 0} \dots q^{a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots} \end{aligned}$$

Podemos notar que el exponente de q es una partición con partes h_i y multiplicidad a_i , por lo cual $a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots = h_1^{a_1} h_2^{a_2} \dots$ entonces

$$\prod_{n \in H} (1 - q^n)^{-1} = \sum_{n \geq 0} P({}^n H^n, n) q^n$$

Ahora, queremos probar la segunda parte del teorema:

$$\sum_{n \geq 0} P({}^n H^n (\leq d), n) q^n = \prod_{n \in H} (1 + q^n + \dots + q^{dn}) = \prod_{n \in H} (1 - q^{(d+1)n}) (1 - q^n)^{-1}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \prod_{n \in H} (1 + q^n + \dots + q^{dn}) &= \sum_{d \geq a_1 \geq 0} \sum_{d \geq a_2 \geq 0} \sum_{d \geq a_3 \geq 0} \dots q^{a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots} \\ &= \sum_{n \geq 0} P({}^n H^n (\leq d), n) q^n \end{aligned}$$

Para la otra fórmula, necesitamos un proceso de truncar el producto infinito a $\prod_{i=1}^n (1 - q^{h_i})^{-1}$. Este producto truncado nos genera las particiones cuyas partes se encuentran en h_1, h_2, \dots, h_n . Ahora, asuma que $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$; entonces si $M = h_n$,

$$\sum_{j=0}^M P({}^n H^n, j) q^j \leq \prod_{i=1}^n (1 - q^{h_i})^{-1} \leq \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^{h_i})^{-1} < \infty$$

aquellos en que la sucesión de la suma parcial $\sum_{j=0}^M P({}^n H^n, j) q^j$ es una sucesión creciente acotada y convergente. De otra mano tenemos que:

$$\sum_{j=0}^M P({}^n H^n, j) q^j \geq \prod_{i=1}^n (1 - q^{h_i})^{-1} \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^{h_i})^{-1} \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

por lo tanto

$$\sum_{j=0}^{\infty} P({}^n H^n, j) q^j = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^{h_i})^{-1} = \prod_{n \in H} (1 - q^n)^{-1}$$

□

Otro resultado importante lo es el Corolario de *Euler*

Corollary 1.6 (Euler). $p(\mathcal{O}, n) = p(\mathcal{D}, n)$ para todo n .

Demostración. Por el Teorema 1.4 tenemos que

$$\sum_{n \geq 0} p(\mathcal{O}, n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})^{-1}$$

y

$$\sum_{n \geq 0} p(\mathcal{D}, n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)$$

Ahora tenemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n})}{(1 - q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n-1}}$$

podemos decir que $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n})}{(1 - q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n-1}}$ ya que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n})}{(1 - q^n)} = \frac{1 - q^{2(1)}}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{2(2)}}{1 - q^2} \cdot \frac{1 - q^{2(3)}}{1 - q^3} \cdot \frac{1 - q^{2(4)}}{1 - q^4} \cdot \frac{1 - q^{2(5)}}{1 - q^5} \cdot \frac{1 - q^{2(6)}}{1 - q^6} \dots$$

Sin pérdida de generalidad obtenemos que

$$\frac{1}{1 - q} \cdot \frac{1}{1 - q^3} \cdot \frac{1}{1 - q^5} \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n-1}}$$

por lo tanto

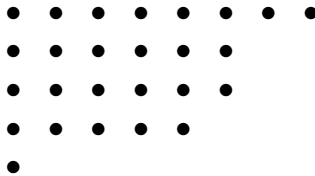
$$\sum_{n \geq 0} p(\mathcal{O}, n) q^n = \sum_{n \geq 0} p(\mathcal{D}, n) q^n$$

y como la expansión de series de potencias de una función es única, podemos ver entonces que $p(\mathcal{O}, n) = p(\mathcal{D}, n)$ para toda n . \square

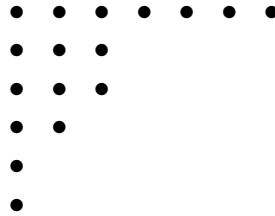
1.3. Representación Gráfica de Particiones

A cada partición se le puede asociar una representación gráfica \mathcal{G}_π o mejor conocido como *Diagrama de Ferrer*, el cual es un conjunto de puntos con coordenadas enteras (i, j) en un plano tal que si $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ entonces $(i, j) \in \mathcal{G}_\pi$ si y solo si $0 \geq i \geq -n + 1$, $0 \leq j \leq \pi_{|i|+1} - 1$. A continuación, dos ejemplos de representaciones gráficas de particiones.

Ejemplo 1.7. La representación gráfica de una partición de $26 = 8 + 6 + 6 + 5 + 1$



Ejemplo 1.8. La representación gráfica de una partición de $17 = 7 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1$

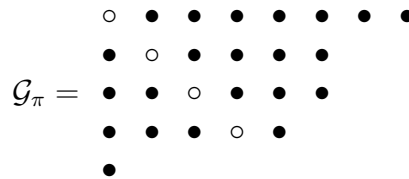


Podemos ver que la i^{ma} fila de la representación gráfica de (h_1, h_2, \dots, h_n) contiene h_i puntos.

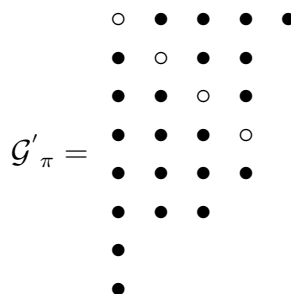
Definición 1.8. Si $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ es una partición, podemos definir una nueva partición $\pi' = (h'_1, h'_2, \dots, h'_m)$ al escoger h'_i como el número de partes de π que es $\geq i$. La partición π' se le conoce como *conjugado* de π .

A continuación se trabajará con un ejemplo de cómo conseguir el conjugado de una partición utilizando el diagrama de Ferrer.

Ejemplo 1.9. $8+6+6+5+1$



y el conjugado es $5+4+4+4+4+3+1+1$, esto se obtiene haciendo una reflexión respecto a la diagonal que está denotada por \circ , de ahí se obtiene el siguiente diagrama

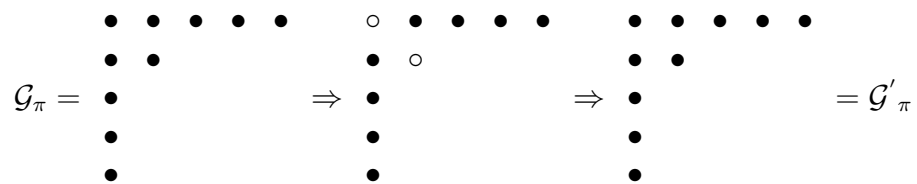


donde $\pi' = (5, 4, 4, 4, 4, 3, 1, 1)$ y $\pi = (8, 6, 6, 5, 1)$. Vemos que $\sum h'_i = \sum h_i$.

Definición 1.9. Una partición π se dice que es *autoconjugada* cuando $\pi = \pi'$.

Para tener una idea más clara de lo que es una partición autoconjugada utilizaremos los *diagramas de Ferrer*.

Ejemplo 1.10. Considere la partición $5+2+1+1+1$, esto es $\pi = (5, 2, 1^3)$ entonces tenemos que:



Note que el número de particiones autoconjugadas para $n = 1, 2, 3, \dots$ es $1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, \dots$ ver A000700 in [Slo].

2. Biyecciones y recurrencias para particiones enteras.

En este capítulo se estudiará un artículo publicado recientemente[BBS09]. Aquí se trabaja sobre recurrencias y biyecciones entre particiones con partes acotadas.

Recordemos el material de la sección 1 en la cual definimos una partición. Sea n un número entero. Una partición π de n es una sucesión no creciente de enteros positivos h_1, h_2, \dots, h_s tal que $\sum_{i=1}^s h_i = n$. Si n es un número entero ya conocido, entonces podemos omitir la primera parte de la partición h_1 esto se puede hacer ya que se puede recuperar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^s h_i \\ n &= h_1 + \sum_{i=2}^s h_i \\ h_1 &= n - \sum_{i=2}^s h_i \end{aligned}$$

con esto podemos decir que (h_2, h_3, \dots, h_s) codifica a π .

Definición 2.1. (h_2, h_3, \dots, h_s) es la representación reducida de π

Sabemos que (h_2, h_3, \dots, h_s) es una sucesión no creciente de números enteros positivos, entonces podemos decir que $n - \sum_{i=2}^s h_i \geq h_2$ ya que $h_1 \geq h_2$. Si esto ocurre entonces (h_2, h_3, \dots, h_s) codifica la partición para n .

Observación 2.1. Podemos representar la partición $n = h_1 + h_2 + \dots + h_s$ por un diagrama de Ferrer (\mathcal{G}_π) de n -nodos cuya j^{ma} columna contiene h_j nodos. Esto nos dice que este diagrama de Ferrer se hace respecto a las columnas y no respecto a las filas como anteriormente habíamos trabajados. Esto se hace por comodidad en cuanto a la aplicación del algoritmo de biyecciones que más adelante discutiremos.

Sea $\Pi_s(n)$ el conjunto de particiones de un número n en exactamente s partes. Sea $p_s(n)$ la cardinalidad de $\Pi_s(n)$.

Vemos que $p_s(n)$ es el número de particiones del entero $n - s$ en a lo más s partes suprimiendo 1 en cada parte.

Proposición 2.2. Para cualquier $n > s$, el conjunto de particiones de n en s partes, cuyas dos primeras partes (partes más grandes) no coinciden corresponde biyectivamente al conjunto $\Pi_s(n - 1)$.

Demostración. Sabemos que (h_2, h_3, \dots, h_s) tal que $n - \sum_{i=2}^s h_i > h_2$ es la representación reducida para ambas particiones, la partición de n en s partes cuyas primeras dos partes no coinciden y el conjunto $\Pi_s(n - 1)$. \square

Ejemplo 2.3. Sea la 4-tupla $(h_2, h_3, h_4, h_5) = (8, 6, 4, 1)$. Vemos que esta es la representación reducida para la partición $29 = 10 + 8 + 6 + 4 + 1$ y para $28 = 9 + 8 + 6 + 4 + 1$. Vemos que existe una Biyección entre ambas particiones debido a que sabemos de la existencia del número n y de la tupla antes definida. Si utilizamos el hecho de que $h_1 = n - \sum_{i=2}^s h_i$, entonces podemos definir en ambas particiones el h_1 , confirmando que hay una Biyección entre estos dos conjuntos.

Definición 2.2. Decimos que $n = h_1 + h_2 + \dots + h_s$ es una partición gemela de n si $h_1 = h_2$. Denotamos $\Pi_s^{(2)}(n)$ como el conjunto de particiones gemelas en $\Pi_s(n)$ y $p_s^{(2)}(n)$ la cardinalidad de $\Pi_s^{(2)}(n)$.

Podemos reformular la *Proposición 2.2* en términos de particiones gemelas dado como:

$$p_s(n) - p_s(n-1) = p_s^{(2)}(n) \quad (4)$$

Ejemplo 2.4. Considere que $n = 6$ y $s = 3$. Esto quiere decir que queremos particiones enteras de 6 en exactamente 3 partes.

$$\begin{aligned} \Pi_3(6) &= (4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2) \\ \Pi_3(5) &= (3, 1, 1), (2, 2, 1) \\ \Pi_3^{(2)}(6) &= (2, 2, 2) \end{aligned}$$

entonces $p_3(6) = 3$, $p_3(5) = 2$, $p_3^{(2)}(6) = 1$ sustituyendo en la formula obtenemos que $p_3(6) - p_3(5) = p_3^{(2)}(6)$ lo cual es cierto.

Proposición 2.5. Para todo $n \geq s$ tenemos que: $p_s(n) = \sum_{k=s}^n p_s^{(2)}(k)$

Demostración. Por (4) tenemos que $p_s(n) - p_s(n-1) = p_s^{(2)}(n)$ entonces $p_s(n) = p_s^{(2)}(n) + p_s(n-1)$ Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} p_s(n) &= p_s^{(2)}(n) + p_s(n-1) \\ &= p_s^{(2)}(n) + p_s^{(2)}(n-1) + p_s(n-2) \\ &\quad \vdots \\ &= p_s^{(2)}(n) + p_s^{(2)}(n-1) + p_s^{(2)}(n-2) + \dots + p_s^{(2)}(s-1) + p_s^{(2)}(s) \\ (\text{reordenando}) &= \sum_{k=s}^n p_s^{(2)}(k) \end{aligned}$$

□

La identidad (3.1) también se puede probar utilizando argumentos con funciones generadoras. Sea $f_s(x)$ la función generadora para la sucesión $p_s(n)$ entonces

$$f_s(x) = x^s \prod_{i=1}^s \frac{1}{1-x^i} = \frac{x^s}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^s)}$$

similarmente la función generadora $f_s^{(2)}(x)$ de la sucesión $p_s^{(2)}(n)$ es (podemos ver esto en [Wil94])

$$f_s^{(2)}(x) = x^s \prod_{i=2}^s \frac{1}{1-x^i} = \frac{x^s}{(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^s)}$$

si comparamos ambas funciones generadoras, esto tomando la diferencia entre las funciones generadoras entonces obtenemos

$$x^{s+1} \prod_{i=1}^s \frac{1}{(1-x^i)} = \frac{x^{s+1}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^s)} = f_s(n-1)$$

2.1. Particiones en tres partes

En esta sección se estarán estableciendo distintas relaciones de recurrencias que envuelven a la sucesión $P_3(n)$. Es importante observar que en una partición gemela $\pi \in \Pi_3^{(2)}(n)$ se puede recuperar utilizando solamente un único parámetro, llamado, el tamaño k de la parte más pequeña de la partición. Como las particiones enteras en dos partes se pueden caracterizar por un parámetro sencillo, es razonable analizar las posibles biyecciones entre las particiones gemelas de n en tres partes y las particiones en dos partes del entero menor.

Para todo entero $n \equiv 0 \pmod{3}$, definiremos la aplicación

$$\varphi_0 : \Pi_3^{(2)}(n) \rightarrow \Pi_2\left(\frac{n}{3} + 1\right)$$

de la misma manera si lo miramos escrito de forma reducida obtenemos que

$$\varphi_0\left(\left(\frac{n-k}{2}, k\right)\right) = \left(\frac{n-3k}{6} + 1\right)$$

Esto quiere decir que la partición gemela $n = \frac{n-k}{2} + \frac{n-k}{2} + k$ es aplicada a la partición $\frac{n}{3} + 1 = \frac{n+3k}{6} + \frac{n-3k+6}{6}$. Vemos que la parte $\frac{n+3k}{6}$ se obtiene con $\frac{n}{3} - 1 - \frac{n-3k+6}{6}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{n+3}{3} - \frac{n-3k+6}{6} \\ &\Rightarrow \frac{2n+6}{6} - \frac{n-3k+6}{6} \\ &\Rightarrow \frac{n+3k}{6} \end{aligned}$$

Vemos que $n-3k$ es par, esto ya que $(\frac{n-k}{2}, k)$ es una partición de n que está bien definida entonces de aquí obtenemos que $n \equiv k \pmod{2}$, como los factores no se pierden, entonces $n \equiv 3k \pmod{2}$ por lo tanto $n-3k$ es par esto ya que $2|n-k \rightarrow 2|n-k-2k \rightarrow 2|n-3k$. Entonces podemos decir que $\frac{n-3k}{6}$ es un entero, entonces el mapa φ_0 está bien definido.

Teorema 2.6. *La aplicación $\varphi_0 : \Pi_3^{(2)}(n) \rightarrow \Pi_2(\frac{n}{3} + 1)$ es una biyección para todo $n \equiv 0 \pmod{3}$*

Demostración. En la aplicación φ_0 la inyectividad es inmediata, ya que para todo elemento de $\Pi_3^{(2)}(n)$ se puede obtener un elemento en $\Pi_2(\frac{n}{3} + 1)$. Para probar la biyección resta por demostrar que ambos conjuntos tengan la misma cardinalidad. Sabemos que $(\frac{n-k}{2}, k)$ es la representación en forma reducida de $\Pi_3^{(2)}(n)$ entonces podemos decir que $\frac{n-k}{2} \geq k$. Vemos que $\frac{n-k}{2}$ tiene que ser un número entero, por lo tanto $n-k \equiv 0 \pmod{2}$. Además tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{n-k}{2} \geq k &\Leftrightarrow n-k \geq 2k \\ &\Leftrightarrow n \geq 3k \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{3} \geq k \end{aligned}$$

por lo tanto podemos decir que $P_3^2(n) = |\{k : 1 \leq k \leq \frac{n}{3} + 1, n - k \equiv 0 \pmod{3}\}|$. Ahora tenemos que trabajar con la cardinalidad de $\Pi_2(\frac{n}{3} + 1)$. Si desarrollamos las particiones para $\frac{n}{3} + 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{n}{3} + 1 - 1, 1 \\ & \frac{n}{3} + 1 - 2, 2 \\ & \frac{n}{3} + 1 - 3, 3 \\ & \vdots \\ & \frac{n}{3} + 1 - h, h \end{aligned}$$

vemos que estas son las posibles particiones de $\frac{n}{3} + 1$ con exactamente 2 partes. Tenemos que $h \leq \frac{n}{3} + 1 - h$ por lo tanto $2h \leq \frac{n}{3} + 1$ y además sabemos que h es una parte de la partición por lo tanto $h \geq 1 \rightarrow 2h \geq 2$ entonces podemos decir que

$$p_2\left(\frac{n}{3} + 1\right) = |\{h : 2 \leq 2h \leq \frac{n}{3} + 1\}|$$

y si se desarrolla $\Pi_3^{(2)}(n)$ y $\Pi_2(\frac{n}{3} + 1)$ vemos que tienen la misma cardinalidad. □

Esta biyección se puede interpretar en términos de lo que ya definimos como \mathcal{G}_π Diagrama de Ferrer. Considere una partición $\pi \in \Pi_3^{(2)}(n)$, con $n \equiv 0 \pmod{3}$ y la representación reducida $(\frac{n-k}{2}, k)$, la partición $\varphi_0(n)$ es obtenida llevando a cabo las siguientes operaciones en el Diagrama de Ferrer asociado a π o \mathcal{G}_π .

- Eliminar la primera fila en \mathcal{G}_π ($n - 3$ nodos)
- Eliminar los últimos dos nodos en las filas restantes con longitud 3 ($n - 1 - 2k$)
- Eliminar $\frac{n}{3} - k$ filas de longitud 2 en \mathcal{G}_π ($\frac{n}{3} - 1$)
- Re arreglamos las nuevas filas en \mathcal{G}_π en orden no-creciente ($\frac{n}{3} - 1$)
- Añada una fila de longitud 2 sobre el diagrama, obteniendo así la forma del Diagrama de Ferrer de $\varphi_0(\pi)$ ($\frac{n}{3} + 1$)

A continuación se trabajará con un ejemplo de la Biyección φ_0 de la partición gemela $24 = 10 + 10 + 4$ a la partición $9 = 6 + 3$

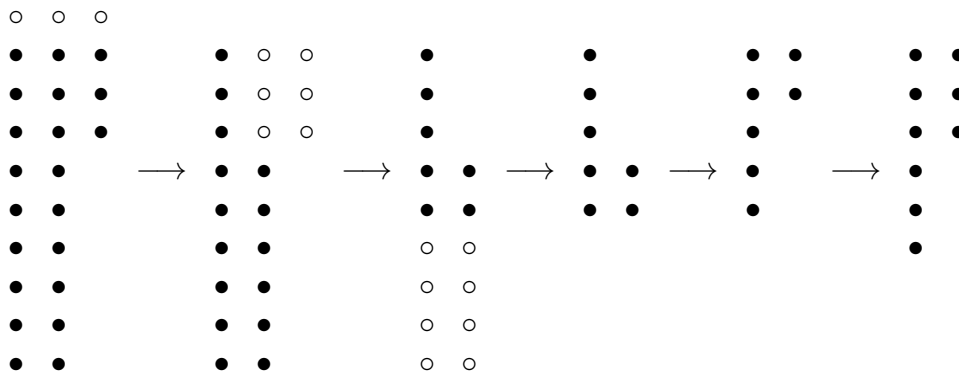


Fig 1. Biyección φ_0 entre la partición gemela $24=10+10+4$ y partición $9=6+3$.

La biyección φ_0 está definida solo cuando $n \equiv 0 \pmod{3}$. El resto de los casos se trabajará notando que las particiones gemelas de $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ solamente se puede aplicar a una partición gemela de $n' \equiv 0 \pmod{3}$:

- si $n = 3m + 1$, definimos una biyección $\xi_1 : \Pi_3^{(2)}(3m + 1) \rightarrow \Pi_3^{(2)}(3m - 3)$ como sigue: para todo $\pi \in \Pi_3^{(2)}(3m + 1)$ cuya representación reducida es (h_2, h_3) , ξ_1 es una partición que se codifica por la lista $(h_2 - 2, h_3)$, y la composición $\varphi_1 = \varphi_0 \circ \xi_1 : \Pi_3^{(2)}(3m + 1) \rightarrow \Pi_2(m)$ la cual es la biyección deseada.
- si $n = 3m + 2$, definimos una biyección $\xi_2 : \Pi_3^{(2)}(3m + 2) \rightarrow \Pi_3^{(2)}(3m)$ como sigue: para todo $\pi \in \Pi_3^{(2)}(3m + 2)$ cuya representación reducida es (h_2, h_3) , $\xi_2(\pi)$ es la partición que codifica por la lista $(h_2 - 1, h_3)$, y la composición $\varphi_2 = \varphi_0 \circ \xi_2 : \Pi_3^{(2)}(3m + 2) \rightarrow \Pi_2(m + 1)$ la cual es la biyección deseada.

Las biyecciones φ_0 , φ_1 y φ_2 nos dan una interpretación combinatorial de las siguientes recurrencias para la sucesión $p_3(n)$:

Teorema 2.7. La sucesión $(p_3(n))_{n \geq 3}$ satisface las siguientes formulas de recurrencias:

$$p_3(n) = p_3(n - 1) + p_2(\psi(n))$$

donde

$$\psi(n) = \begin{cases} \frac{n}{3} + 1 & \text{if } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{n-1}{3} & \text{if } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{n+1}{3} & \text{if } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

□

3. Bibliografía

Referencias

- [And98] G. Andrwes, *The theory of partitions (encyclopedia of mathematics and its applications)*, Cambridge University Press, United Kindom, 1998.
- [BBS09] M. Barnabei, F. Bonetti, and M. Silimbani, *Bijections and recurrences for integer partitions into a bounded number of parts*, Applied Mathematics Letters **22** (2009), 297–303.
- [BCL70] R. Bellman, K. Cooke, and J. Lockett, *Algorithms, graphs and computers*, Academic Press, New York, USA, 1970.
- [CCR00] T. Cormen, C. Leiserson, and R. Rivest, *Introduction to algorithms*, MIT Press, Massachusetts, USA, 2000.
- [GKW93] R. Gaylord, S. Kamin, and P. Wellin, *Introduction to programming with mathematica*, Springer-Verlag, New York, USA, 1993.
- [HW60] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford Univeristy Press, London, 1960.
- [Liu68] C. L. Liu, *Introduction to combinatorial mathematics*, McGraw-Hill, United States, 1968.
- [Ski90] S. Skiena, *Implementing discrete mathematics:combinatorics and graph theory with mathematica*, Addison-Wesley, California, 1990.
- [Slo] N.J.A. Sloane, *The on-line encyclopedia of integer sequences*, <http://www.research.att.com/njas/sequences>.
- [SW86] D. Stanton and D. White, *Constructive combinatorics*, Springer-Verlag (Undergraduate Texts in Mathematics), New York, 1986.
- [Wil94] H. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, USA, 1994.