Series de Taylor

Aniel Nieves-González

Introducción

- Las series de potencia ("power series") son importantes en muchas aplicaciones, entre ellas el la representación o aproximación de funciones.

Introducción

- Las series de potencia ("power series") son importantes en muchas aplicaciones, entre ellas el la representación o aproximación de funciones.
- Las series de Taylor son un ejemplo de series de potencias.

Introducción

- Las series de potencia ("power series") son importantes en muchas aplicaciones, entre ellas el la representación o aproximación de funciones.
- Las series de Taylor son un ejemplo de series de potencias.
- Veremos como si f es una función en $\mathbb{R}$ y bajo ciertas condiciones podemos escribir a f como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x-c)^k$$

Introducción

- Las series de potencia ("power series") son importantes en muchas aplicaciones, entre ellas el la representación o aproximación de funciones.
- Las series de Taylor son un ejemplo de series de potencias.
- Veremos como si f es una función en $\mathbb{R}$ y bajo ciertas condiciones podemos escribir a f como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x-c)^k$$

- Veremos que las series de McLaurin son un caso especial de las series de Taylor.

Polinomios de Taylor

Definition

Sea $c \in \mathbb{R}$, f función en $\mathbb{R}$ n veces diferenciable. El *polinomio de Taylor* de grado n alrededor de c es

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Usaremos polinomios de Taylor para aproximar a f. Veamos un ejemplo...

Ejemplo 1

Construya $P_4(x)$ alrededor de cero para las siguientes funciones:

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \sin(x)$

Formula de Taylor con residuo

Theorem (Formula de Taylor)

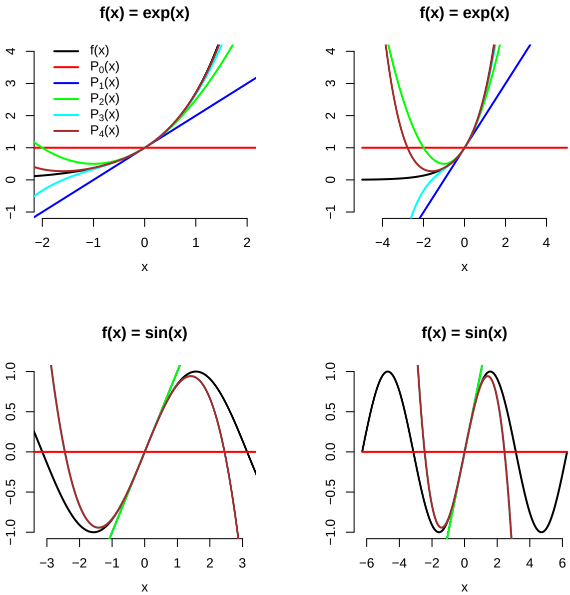
Sea f una función en $\mathbb{R}$ n veces diferenciable en intervalo (a, b) y suponga que $f^{(n-1)}$ es continua en intervalo $[a, b]$. Suponga que $c \in [a, b]$. Entonces $\forall x \in [a, b]$, $x \neq c$ existe un punto x^* entre c y x tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n-1}(x) + R_n(x) \\ &= f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x-c)^n \end{aligned}$$

Note lo siguiente:

- La formula de Taylor nos permite aproximar a $f(x)$ con $P_{n-1}(x)$ en un vecindario de c.
- $R_n(x)$ (residual) determina la exactitud de la aproximación.
- x^* es desconocido.

Taylor expansion of f(x) around zero



Observe los siguiente:

1. Existen otras maneras de escribir el residuo $R_n(x)$.

Observe los siguiente:

1. Existen otras maneras de escribir el residuo $R_n(x)$.
2. La formula de Taylor con residuo puede verse como consecuencia del Teorema del valor medio generalizado ("Generalized Mean-value theorem").

Observe los siguiente:

1. Existen otras maneras de escribir el residuo $R_n(x)$.
2. La formula de Taylor con residuo puede verse como consecuencia del Teorema del valor medio generalizado ("Generalized Mean-value theorem").
3. Si todas las derivadas de f existen (y condiciones adicionales) tenemos
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$
Esta es la serie de Taylor alrededor de c. La convergencia de la misma depende de condiciones que veremos más adelante.

Observe los siguiente:

1. Existen otras maneras de escribir el residuo $R_n(x)$.
2. La formula de Taylor con residuo puede verse como consecuencia del Teorema del valor medio generalizado ("Generalized Mean-value theorem").
3. Si todas las derivadas de f existen (y condiciones adicionales) tenemos
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$
Esta es la serie de Taylor alrededor de c. La convergencia de la misma depende de condiciones que veremos más adelante.
4. Si tomamos $c = 0$, la serie de Taylor pasa a llamarse serie de McLaurin.

Ejemplo 2

Aproxime $f(x) = \sin(0.3)$ y determine el error de su aproximación.

Conclusión

- Bajo las condiciones del teorema de Taylor podemos aproximar una función en los reales con un polinomio de grado n en un *vecindario* de un punto $c \in \mathbb{R}$
- El Error de la aproximación está dado por $R_n(x)$.

Preguntas…