Introducción a series de tiempo

Aniel Nieves-González

Spring 2014

Definiciones

Definition (Serie de tiempo (Time Series))

Una serie de tiempo (ST) es una sucesión de medidas de un proceso tomadas a intervalos regulares de tiempo. Matemáticamente podemos denotar a la serie de tiempo como:

$$\{Y(t_i)\} = \{Y_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$$

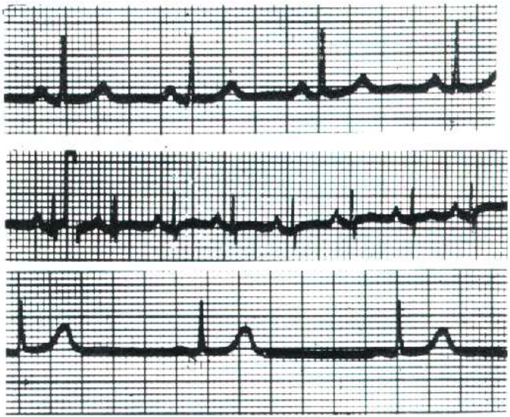
Definition (Time Plot (Time Record))

Gráfica de cada observación versus el tiempo en el cual la medida fue tomada.

Un *proceso estocástico* (random process) puede verse como la colección de todas posibles series de tiempo que el proceso pueda producir. Observe que podemos interpretar al tiempo como la variable independiente (explicativa) y a la serie de tiempo como la variable dependiente (response).

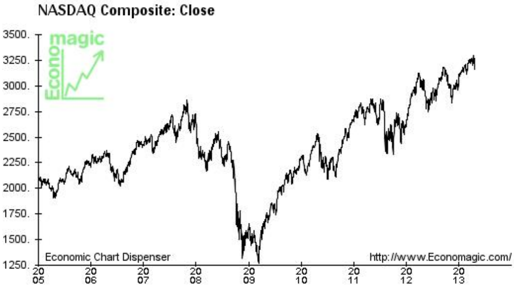
Ejemplos

EKG



Ejemplos

NASDAQ composite index



Ejemplos

Bitcoin exchange rate

Definiciones (cont.)

Definition (Stationary (Estacionario))

Un proceso estocastico es estacionario si parámetros como la media y la varianza no cambian con el tiempo.

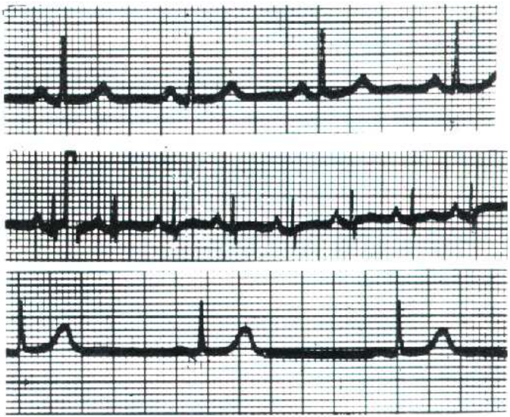
Definition (Tendencia (trend))

Un patrón crecimiento o caída persistente y a largo plazo de una serie de tiempo define una tendencia.

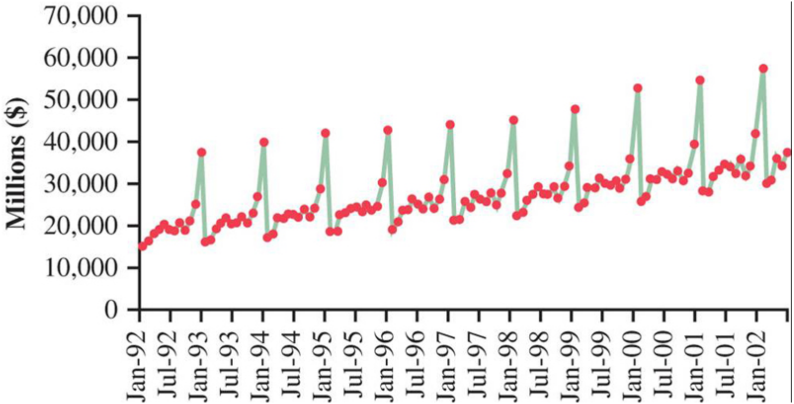
Definition (Variación estacional (seasonal variation))

Un patrón que se repite en la serie de tiempo a intervalos de tiempo conocidos define una variación estacional.

Ejemplos



Ejemplos



Millions ($)
70,000
60,000
50,000
40,000
30,000
20,000
10,000
0
Jan-92
Jul-92
Jan-93
Jul-93
Jan-94
Jul-94
Jan-95
Jul-95
Jan-96
Jul-96
Jan-97
Jul-97
Jan-98
Jul-98
Jan-99
Jul-99
Jan-00
Jul-00
Jan-01
Jul-01
Jan-02

Definiciones (cont.)

Definition (Forecast)

Un forecast es una predicción de un valor futuro de una serie de tiempo.

Identificando (modelando) tendencias

Para modelar una tendencia en una ST podemos hacer lo siguiente:

- Resolver el problema de cuadrados mínimos (LSP) usando un modelo apropiado para la tendencia, esto es, resolver

$$\min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^{n} (F(t_i, \mathbf{p}) - Y_i)^2$$

  donde F es el modelo.

- Por ejemplo, F puede ser un polinomio o una exponencial

$$F(t_i, b_0, \ldots, b_k) = \sum_{j=0}^{k} b_j t_i^j \quad \text{polinomio de grado k,}$$
$$F(t_i, \alpha, \beta) = \alpha e^{\beta t_i} \quad \text{exponencial}$$

- El polinomio de grado 1 es un caso conocido...
- En la práctica usarán una máquina (software) para resolver el LSP. Y de usar un modelo polinomial es preferible que se use uno de grado bajo (no mayor de grado 3).

Detrending

- Una vez identificamos la tendencia en una ST, podemos entonces removerla (detrend). Esto es:

$$Y_i^{\text{detrended}} = Y_i - F(t_i, \mathbf{p})$$

  donde $F(t_i, \mathbf{p})$ es el modelo del "trend".
- Precaución: aunque algunas técnicas para estudiar ST requieren que se haga detrending a la ST como prerequisito, es importante considerar la causa de dicha tendencia.

Patrones estacionales (seasonal patterns)

Los patrones estacionales han de incorporarse junto al modelo de la tendencia para modelar la ST.

Considere el modelo y de la ST:

- Caso 1,

$$y = F^{\text{trend}} + F^{\text{season}}$$

  En este caso el modelo del season se construye con "indicator variables" (variable aleatoria que toma valor de 1 cuando se cumple una codicón determinada y cero si no se cumple). Ver ejemplo 13.3, y pág. 660.

Considere el modelo y de la ST:

- Caso 1,

$$y = F^{\text{trend}} + F^{\text{season}}$$

  En este caso el modelo del season se construye con “indicator variables” (variable aleatoria que toma valor de 1 cuando se cumple una codicón determinada y cero si no se cumple). Ver ejemplo 13.3, y pág. 660.

- Caso 2,

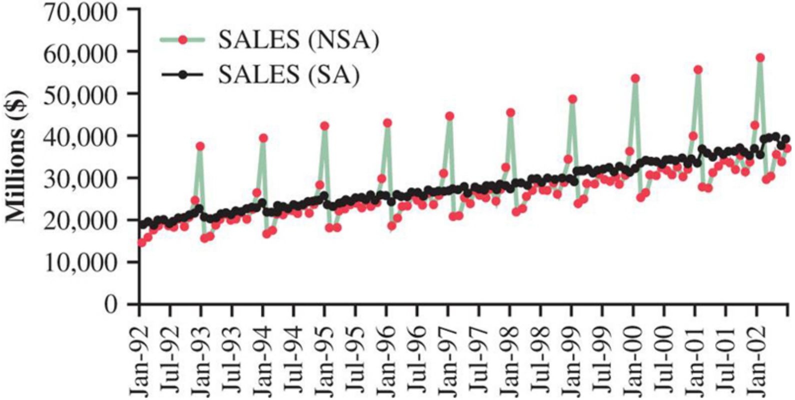
$$y = F^{\text{trend}} F^{\text{season}}$$

  donde F^{season} es el seasonality factor. Este se calcula para cada season. (Ver ejemplo 13.4).

Seasonally adjusted data

Una ST seasonally adjusted es una ST para la cual los valores que corresponden a un season se han multiplicado por $1/F^{\text{season}}$

Seasonally adjusted data



Autocorrelation

La autocorrelación mide como los valores del pasado influencian los valores del presente en una ST. Esto es, una medida de las propiedades temporales en los datos que estan separados por resago (delay) fijo.

Definition (Autocorrelación)

Sea $\{Y_i\}$ una ST. La autocorrelación con lag j se define como:

$$R_{yy}(j) = \sum_{k=1}^{N} Y_k Y_{k-j}$$

Autocorrelation

- Una manera alterna para detectar autocorrelación en una serie de tiempo es el “lagged residual plot”.
- Un *lagged residual plot* es un “scatter plot” de residuales ($e =$ modelo $-$ datos) versus los residuales lagged (resago) por un periodo de tiempo. O sea el scatter plot consiste de los puntos $\{(e_{i-1}, e_i)\}$.
- Una asociación positiva en (e_{i-1}, e_i) indica una autocorrelación positiva. Lo análogo ocurre con la asociación negativa en (e_{i-1}, e_i)
- El Durbin-Watson test es la prueba estadística para atacar el problema en forma definitiva.

Modelos de series de tiempo

En muchas ocasiones usaremos modelos de series de tiempo que usan los valores de la ST en el pasado para predecir los valores futuros de la ST. Presentaremos algunos modelos...

Modelos de series de tiempo

Definition (First-order autogregression model (AR_1))

El modelo define la relación entre puntos sucesivos de la ST como una relación lineal:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 Y_{i-1} + \epsilon_i$$

donde $i = 0, 1, \ldots$, ϵ_i es el error, y los β's los parámetros.

Para encontrar los β's no resolveremos el problema de los cuadrados minimos sino que usaremos la técnica del estimador de máxima verosimilitud (maximum likelihood estimator).

Modelos de series de tiempo

Definition (Moving average forecast model)

Este modelo usa el promedio de los k valores previos de la ST como la predicción del valor actual, esto es:

$$y_i = \frac{\sum_{j=1}^{k} Y_{i-j}}{k}$$

donde $i = 0, 1, \ldots$.

Este modelo tiende a suavizar (smooth) la ST para valores grandes de k. (Ver ejemplo 13.12)

Moving average forecast model

Desventajas:

- Se ignora toda la información previa con exepción de los k puntos previos.
- Los k puntos previos tienen el mismo peso.

Modelos de series de tiempo

Definition (Exponential smoothing model)

Este modelo usa el promedio ponderado entre el valor previo en la ST y la predicción previa como la predicción del valor actual, esto es:

$$y_i = wY_{i-1} + (1-w)y_{i-1}$$

donde $i = 0, 1, \ldots$, $w \in [0, 1]$ es el smoothing constant.

Exponential smoothing model

- w es el peso. $w = 1$ le da todo el peso al valor previo de la ST.
- El exponential smoothing model fue dado en forma recursiva, pero expandiendo dicha forma observamos:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= wY_i + (1-w)y_i \\ &= wY_i + (1-w)(wY_{i-1} + (1-w)y_{i-1}) \\ &= wY_i + (1-w)wY_{i-1} + (1-w)^2 y_{i-1} \\ &\vdots \\ &= wY_i + (1-w)wY_{i-1} + \ldots + (1-w)^{i-2}wY_2 + (1-w)^{i-1}Y_1 \end{aligned}$$

- Note como la dependencia en información del pasado afecta menos al presente.

Splines

- El problema de interpolación polinomial consiste en encontrar un polinomio de grado k ($P_k(x)$) que satisfaga $P(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, N$ para un conjunto de datos $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)\}$.
- Los splines son funciones por pedazos (piecewise) construidas con polinomios que interpolan los datos, y que tanto ellos como sus derivadas satisfacen ciertas propiedades de continuidad, toman ciertos valores en los extremos etc.
- Los splines cúbicos, son splines de grado 3.