Sucesiones convergentes

Aniel Nieves-González

Introducción

- Definición
- Convergencia
- Propiedades básicas de sucesiones convergentes.

Sucesión: Definición

- Intuitivamente puede decirse que una sucesión es un listado infinito de números: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ como por ejemplo:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Sucesión: Definición

- Intuitivamente puede decirse que una sucesión es un listado infinito de números: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ como por ejemplo:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

- Una *sucesión* es una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Usualmente la denotamos como $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ o $\{a_n\}$. El valor del n-ésimo término es a_n.

Sucesión: Definición

- Intuitivamente puede decirse que una sucesión es un listado infinito de números: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ como por ejemplo:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

- Una *sucesión* es una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Usualmente la denotamos como $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ o $\{a_n\}$. El valor del n-ésimo término es a_n.
- El concepto de sucesiones es importante en muchas areas de la matemática aplicada, como análisis numérico.

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
3. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
3. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
4. $\{a_n\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
3. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
4. $\{a_n\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$
5. $\{a_n\} = \{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
3. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
4. $\{a_n\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$
5. $\{a_n\} = \{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$
6. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$

Ejemplos

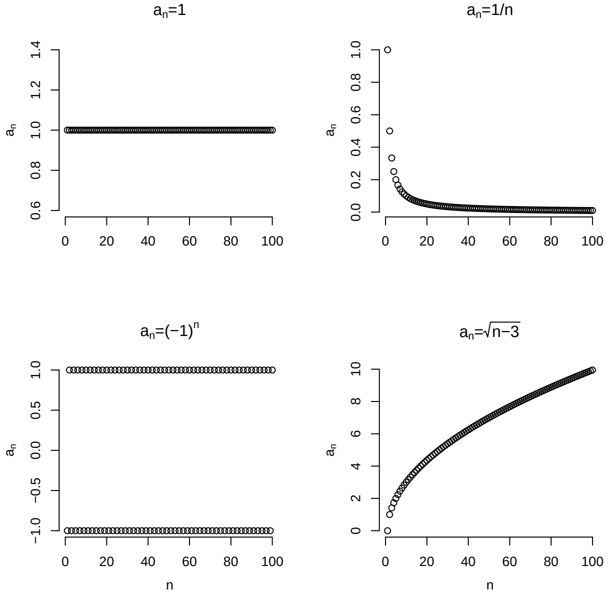
1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
3. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
4. $\{a_n\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$
5. $\{a_n\} = \{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$
6. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$
7. $\{a_n\} = \{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
3. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
4. $\{a_n\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$
5. $\{a_n\} = \{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$
6. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$
7. $\{a_n\} = \{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$
8. La sucesión de Fibonacci $\{f_n\}$, donde

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 3$$

Ejemplos


a_n=1
a_n=1/n
a_n=(−1)^n
a_n=$\sqrt{n-3}$
a_n
n
0
20
40
60
80
100
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
0
2
4
6
8
10

Sucesión acotada (“bounded”)

1. Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente si existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M \ \forall n$
2. Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormemte si existe un $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a_n \ \forall n$
3. Si una sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormente y superiormente entonces decimos que $\{a_n\}$ es acotada.

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.
3. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.
3. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.
4. $\{a_n\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada inferiormente.

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.
3. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.
4. $\{a_n\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada inferiormente.
5. $\{a_n\} = \{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada.

Definición (Convergencia)

Decimos que una sucesión $\{a_n\}$ converge *si existe un* $L \in \mathbb{R}$ *que satisface lo siguiente: para cada* $\epsilon > 0$ *existe un* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

En dicho caso decimos que $\{a_n\}$ *converge a* L *o que* L *es el límite de* $\{a_n\}$ *y lo denotamos como*

$$a_n \to L \text{ mientras } n \to \infty \text{ ó}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Decimos que una sucesión que no es convergente es divergente.

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ converge.
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge.

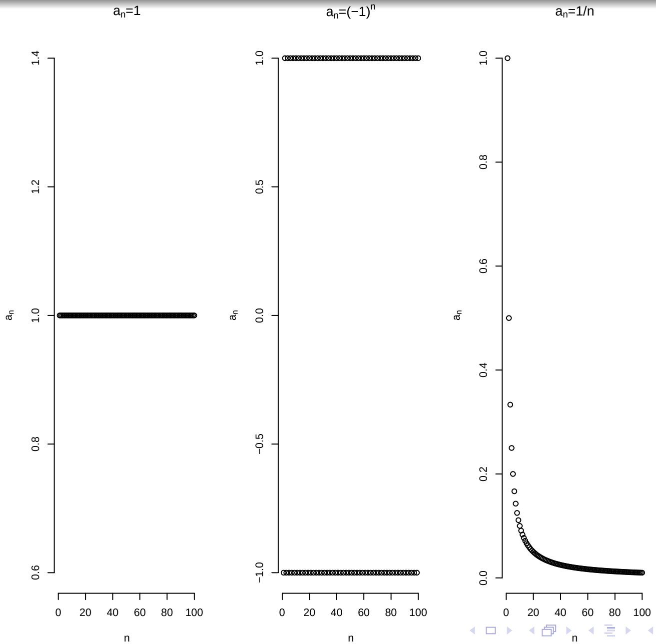
Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ converge.
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge.
3. Considere $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Ejemplos

1. $\{a_n\} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ converge.
2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge.
3. Considere $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
   Para cualquier $\epsilon > 0$ tome $n_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} + 1$ y note $|a_n - 0| < \epsilon$.

Ejemplos



Resultados importantes

Partiendo de la definición de convergencia pueden obtenerse los siguientes resultados:

1. El límite de de una sucesión convergente es único.
2. Una sucesión convergente está acotada.

Adicionalmente también puede demostrarse que

Teorema

Si f es función en $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ donde n es entero entonces $a_n \to L$.

Propiedades de sucesiones convergentes

Sean $a_n \to a$ y $b_n \to b$. Entonces:

1. $a_n + b_n \to a + b$.
2. $ra_n \to ra$.
3. $a_n b_n \to ab$.
4. Si $a \neq 0$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0\ \forall n \geq m$ y

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

5. Si $p > 0$ y $a_n > 0$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^p$$

Ejemplo

Calcule los límites de las siguientes sucesiones:

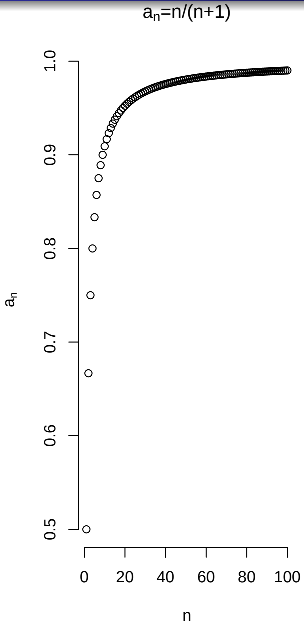
1. $a_n = \frac{n}{n+1}$

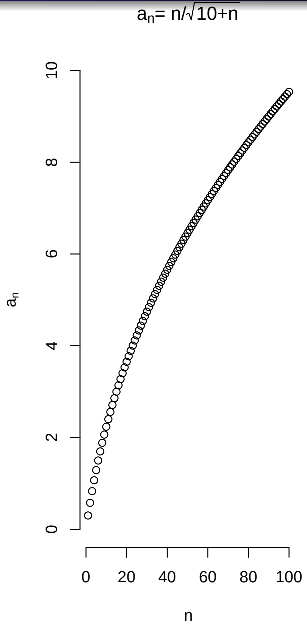
Ejemplo

Calcule los límites de las siguientes sucesiones:

1. $a_n = \frac{n}{n+1}$
2. $a_n = \frac{n}{\sqrt{10+n}}$

Ejemplo


a_n=n/(n+1)
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
a_n
0
20
40
60
80
100
n


a_n= n/$\sqrt{10+n}$
10
8
6
4
2
0
a_n
0
20
40
60
80
100
n

Resumen

- Una sucesión en $\mathbb{R}$ es una relación o asociación entre los números naturales y los reales.
- Una sucesión converge a un número L cuando podemos encontrar un término en la misma tal que la distancia entre L y dicho término y sus subsiguientes es arbitrariamente pequeña.
- Las propiedades básicas de sucesiones convergentes nos permiten determinar la convergencia de sucesiones más complicadas.

Preguntas…